

Table des matières

Avant-propos	7
Table des matières	13
Table des figures	16
Liste des tableaux	18
1 Rappels et compléments de mathématiques	19
1.1 Espaces de Hilbert	19
1.1.1 Espaces préhilbertiens réels	19
1.1.2 Théorèmes de projection	25
1.1.3 Dual d'un espace de Hilbert	30
1.1.4 Somme hilbertienne — Base hilbertienne	32
1.1.5 Les théorèmes de Stampacchia, Lax-Milgram et Brezzi	36
1.1.5.1 Résultats préliminaires	36
1.1.5.2 Le théorème de Stampacchia	38
1.1.5.3 Le théorème de Lax-Milgram	40
1.1.5.4 Le théorème de Brezzi	41
1.1.6 Généralisation aux problèmes non linéaires	44
1.1.6.1 Notations	44
1.1.6.2 Un résultat préliminaire	45
1.1.6.3 Première classe de problèmes : $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M; \mathbb{R})}$	46
1.1.6.4 Deuxième classe de problèmes : c est coercive	48
1.1.6.5 Troisième classe de problèmes : c est non coercive	49
1.2 Les espaces L^p	51
1.2.1 Quelques résultats d'intégration	52
1.2.2 Les espaces $L^p(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$	53
1.2.3 Réflexivité, séparabilité, dual de $L^p(\Omega)$	61
1.3 Quelques indications sur l'espace $H^1(\Omega)$	70
1.3.1 Rappels sur les distributions	70
1.3.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	74
1.3.3 Un théorème de trace	78

2	Rappels et compléments de mécanique des milieux continus	83
2.1	Cinématique des milieux continus	83
2.1.1	Repérage des milieux continus	83
2.1.1.1	Configuration de référence et configuration actuelle	83
2.1.1.2	Transformation linéaire tangente	84
2.1.2	Transformation de domaines matériels élémentaires	85
2.1.2.1	Transformation d'un volume matériel élémentaire	85
2.1.2.2	Transformation d'une surface matérielle élémentaire	86
2.1.3	Champ des déplacements et champ des vitesses	86
2.1.4	Dérivées matérielles	87
2.1.4.1	Définition	87
2.1.4.2	Champ des accélérations	88
2.1.4.3	Dérivées matérielles du gradient et du jacobien de la transformation	88
2.1.4.4	Dérivée matérielle d'une surface matérielle élémentaire	89
2.1.5	Équations de conservation de la masse	90
2.2	Tenseurs des déformations	90
2.3	Tenseurs des contraintes	91
2.3.1	Tenseurs des contraintes de Boussinesq et de Piola-Kirchhoff	91
2.3.2	Équations indéfinies du mouvement	92
2.4	Grandeurs objectives	94
2.4.1	Tenseurs des déformations	94
2.4.2	Tenseurs des contraintes	95
2.4.3	Champ des vitesses	96
2.4.4	Dérivées matérielles des tenseurs de contrainte et de déformation	97
3	Introduction à la méthode des éléments finis	99
3.1	Étude d'un problème modèle : La corde sur fondation élastique	99
3.1.1	Le problème initial	99
3.1.2	Formulation variationnelle	100
3.1.2.1	Un théorème	101
3.1.2.2	Une définition	102
3.1.2.3	Un résultat d'existence et d'unicité	103
3.1.3	Méthodes de Galerkin	104
3.1.3.1	Écriture abstraite d'un problème variationnel	105
3.1.3.2	Formulation variationnelle approchée de Galerkin	105
3.1.3.3	Résolution numérique d'un problème approché de Galerkin	106
3.1.3.4	Les méthodes de Galerkin	107
3.1.4	Construction d'un espace d'éléments finis	108
3.1.4.1	Premier outil : définition d'un élément fini	108
3.1.4.2	Deuxième outil : triangulation	109
3.1.4.3	Troisième outil : matrice de connectivité	110

3.1.4.4	Construction finale des fonctions $\psi_i, i \in \{1, \dots, M_h\}$	110
3.1.4.5	Résolution numérique d'un problème de Galerkin par la méthode des éléments finis	112
3.2	Étude du problème de l'élastostatique infinitésimale	116
3.2.1	Le problème initial	116
3.2.2	Formulation variationnelle	117
3.2.3	Un résultat d'existence et d'unicité	119
3.2.4	Exemple numérique : équilibre d'un barrage poids élastique	123
3.2.4.1	Choix d'un élément fini bidimensionnel	123
3.2.4.2	Triangulation	125
3.2.4.3	Matrice de connectivité	126
3.2.4.4	Expressions locales des déplacements, des déformations et des contraintes	127
3.2.4.5	Résolution numérique	130
4	Petites perturbations de milieux viscoélastiques	137
4.1	Viscoélasticité linéaire : une formulation à un champ en déplacement	137
4.1.1	Le problème initial	137
4.1.1.1	Hypothèses et premières notations	137
4.1.1.2	Les relations de comportement	138
4.1.2	Discrétisation temporelle	139
4.1.2.1	Position du problème	139
4.1.2.2	Mise en œuvre du θ -schéma pour l'équation de Dahlquist	140
4.1.2.3	Discrétisation des relations de comportement	142
4.1.3	Un résultat d'existence et d'unicité	145
4.1.4	Simulations numériques	147
4.1.4.1	Compression triaxiale homogène	147
4.1.4.2	Expansion d'un cylindre creux	151
4.1.4.3	Poutre viscoélastique en flexion	154
4.2	Viscoélasticité incompressible : une formulation mixte en vitesse-pressure	157
4.2.1	Le problème initial	157
4.2.1.1	Hypothèses et premières notations	157
4.2.1.2	Les relations de comportement	158
4.2.2	Formulation variationnelle du problème d'évolution	159
4.2.3	Discrétisation temporelle	161
4.2.4	Un résultat d'existence et d'unicité	162
4.2.5	Discrétisation spatiale	165
4.2.5.1	Problème approché de Galerkin	165
4.2.5.2	Exemples d'éléments finis mixtes bidimensionnels	165
4.2.5.3	Résolution algébrique	167
4.2.6	Exemple de simulation numérique	169

5	Transformations finies de milieux élastoviscoplastiques	173
5.1	Position du problème	173
5.1.1	Le problème initial	173
5.1.2	Discrétisation temporelle : hypothèse et notations préliminaires	175
5.2	Formulations variationnelles en déplacement	176
5.2.1	Approche eulérienne	176
5.2.2	Approche lagrangienne	178
5.3	Formulations variationnelles en vitesse	181
5.3.1	Philosophie	181
5.3.2	Premiers résultats	182
5.3.3	Formulation variationnelle à un champ	184
5.3.3.1	Formulation variationnelle	184
5.3.3.2	Un résultat d'existence et d'unicité	185
5.3.4	Formulation variationnelle à deux champs	189
5.3.4.1	Formulation variationnelle	189
5.3.4.2	Un résultat d'existence et d'unicité	190
5.3.4.3	Discrétisation spatiale	193
5.3.4.4	Résolution algébrique	194
5.3.5	Intégration temporelle	196
5.4	Simulations numériques	197
5.4.1	Transformations linéaires planes	198
5.4.1.1	Expansion homogène	198
5.4.1.2	Élongation uniaxiale	200
5.4.1.3	Distorsion pure	201
5.4.2	Poutre console	204
5.4.2.1	Comportement hypoélastique	204
5.4.2.2	Comportement élastoplastique	206
5.4.3	Cylindre creux en expansion	208
5.4.4	Poinçonnement d'un massif de sol	210
A	Schéma discret de Royis	215
A.1	Introduction	215
A.2	The time-continuous mechanical problem	217
A.2.1	General considerations	217
A.2.2	The constitutive equations	218
A.3	Weak formulation of the time-discretized mechanical problem	220
A.4	Time discretization of the constitutive equations	222
A.4.1	The integral scheme S1	224
A.4.2	The θ -scheme S2	226
A.4.3	The scheme S3	226
A.4.4	Application to the linear viscoelastic model	230
A.4.5	Application to the unified non-linear viscoelastic model	231
A.5	Numerical computations	235

A.5.1	Homogeneous triaxial compression path	236
A.5.2	Expanding viscoelastic hollow cylinder	241
A.5.3	Bending viscoelastic beam	243
A.6	Concluding remarks	245
B	Théorèmes de Royis	247
B.1	Statement of the problem	247
B.2	Notations — Preliminary result	248
B.3	Existence and uniqueness results	249
B.3.1	First class of problems : $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M; \mathbb{R})}$	249
B.3.2	Second class of problems : c is coercive	250
B.3.3	Third class of problems : c is non coercive	252
B.4	Application to geomechanical boundary value problems	254
B.4.1	Statement of the problem	254
B.4.2	Weak formulation of the time discretized problem	255
B.4.3	Discussion	257
B.5	Conclusion	260
	Bibliographie	263
	Index	266