

# Table des matières

Avant-propos . . . . .	7
Table des matières . . . . .	13
Table des figures . . . . .	16
Liste des tableaux . . . . .	18
<b>1 Rappels et compléments de mathématiques . . . . .</b>	<b>19</b>
1.1 Espaces de Hilbert . . . . .	19
1.1.1 Espaces préhilbertiens réels . . . . .	19
1.1.2 Théorèmes de projection . . . . .	25
1.1.3 Dual d'un espace de Hilbert . . . . .	30
1.1.4 Somme hilbertienne — Base hilbertienne . . . . .	32
1.1.5 Les théorèmes de Stampacchia, Lax-Milgram et Brezzi . . . . .	36
1.1.5.1 Résultats préliminaires . . . . .	36
1.1.5.2 Le théorème de Stampacchia . . . . .	38
1.1.5.3 Le théorème de Lax-Milgram . . . . .	40
1.1.5.4 Le théorème de Brezzi . . . . .	41
1.1.6 Généralisation aux problèmes non linéaires . . . . .	44
1.1.6.1 Notations . . . . .	44
1.1.6.2 Un résultat préliminaire . . . . .	45
1.1.6.3 Première classe de problèmes : $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M; \mathbb{R})}$ . . . . .	46
1.1.6.4 Deuxième classe de problèmes : $c$ est coercive . . . . .	48
1.1.6.5 Troisième classe de problèmes : $c$ est non coercive . . . . .	49
1.2 Les espaces $L^p$ . . . . .	51
1.2.1 Quelques résultats d'intégration . . . . .	52
1.2.2 Les espaces $L^p(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ . . . . .	53
1.2.3 Réflexivité, séparabilité, dual de $L^p(\Omega)$ . . . . .	61
1.3 Quelques indications sur l'espace $H^1(\Omega)$ . . . . .	70
1.3.1 Rappels sur les distributions . . . . .	70
1.3.2 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ . . . . .	74
1.3.3 Un théorème de trace . . . . .	78

<b>2</b>	<b>Rappels et compléments de mécanique des milieux continus</b>	<b>83</b>
2.1	Cinématique des milieux continus	83
2.1.1	Repérage des milieux continus	83
2.1.1.1	Configuration de référence et configuration actuelle	83
2.1.1.2	Transformation linéaire tangente	84
2.1.2	Transformation de domaines matériels élémentaires	85
2.1.2.1	Transformation d'un volume matériel élémentaire	85
2.1.2.2	Transformation d'une surface matérielle élémentaire	86
2.1.3	Champ des déplacements et champ des vitesses	86
2.1.4	Dérivées matérielles	87
2.1.4.1	Définition	87
2.1.4.2	Champ des accélérations	88
2.1.4.3	Dérivées matérielles du gradient et du jacobien de la transformation	88
2.1.4.4	Dérivée matérielle d'une surface matérielle élémentaire	89
2.1.5	Équations de conservation de la masse	90
2.2	Tenseurs des déformations	90
2.3	Tenseurs des contraintes	91
2.3.1	Tenseurs des contraintes de Boussinesq et de Piola-Kirchhoff	91
2.3.2	Équations indéfinies du mouvement	92
2.4	Grandeurs objectives	94
2.4.1	Tenseurs des déformations	94
2.4.2	Tenseurs des contraintes	95
2.4.3	Champ des vitesses	96
2.4.4	Dérivées matérielles des tenseurs de contrainte et de déformation	97
<b>3</b>	<b>Introduction à la méthode des éléments finis</b>	<b>99</b>
3.1	Étude d'un problème modèle : La corde sur fondation élastique	99
3.1.1	Le problème initial	99
3.1.2	Formulation variationnelle	100
3.1.2.1	Un théorème	101
3.1.2.2	Une définition	102
3.1.2.3	Un résultat d'existence et d'unicité	103
3.1.3	Méthodes de Galerkin	104
3.1.3.1	Écriture abstraite d'un problème variationnel	105
3.1.3.2	Formulation variationnelle approchée de Galerkin	105
3.1.3.3	Résolution numérique d'un problème approché de Galerkin	106
3.1.3.4	Les méthodes de Galerkin	107
3.1.4	Construction d'un espace d'éléments finis	108
3.1.4.1	Premier outil : définition d'un élément fini	108
3.1.4.2	Deuxième outil : triangulation	109
3.1.4.3	Troisième outil : matrice de connectivité	110

3.1.4.4	Construction finale des fonctions $\psi_i, i \in \{1, \dots, M_h\}$	110
3.1.4.5	Résolution numérique d'un problème de Galerkin par la méthode des éléments finis	112
3.2	Étude du problème de l'élastostatique infinitésimale	116
3.2.1	Le problème initial	116
3.2.2	Formulation variationnelle	117
3.2.3	Un résultat d'existence et d'unicité	119
3.2.4	Exemple numérique : équilibre d'un barrage poids élastique	123
3.2.4.1	Choix d'un élément fini bidimensionnel	123
3.2.4.2	Triangulation	125
3.2.4.3	Matrice de connectivité	126
3.2.4.4	Expressions locales des déplacements, des déformations et des contraintes	127
3.2.4.5	Résolution numérique	130
<b>4</b>	<b>Petites perturbations de milieux viscoélastiques</b>	<b>137</b>
4.1	Viscoélasticité linéaire : une formulation à un champ en déplacement	137
4.1.1	Le problème initial	137
4.1.1.1	Hypothèses et premières notations	137
4.1.1.2	Les relations de comportement	138
4.1.2	Discrétisation temporelle	139
4.1.2.1	Position du problème	139
4.1.2.2	Mise en œuvre du $\theta$ -schéma pour l'équation de Dahlquist	140
4.1.2.3	Discrétisation des relations de comportement	142
4.1.3	Un résultat d'existence et d'unicité	145
4.1.4	Simulations numériques	147
4.1.4.1	Compression triaxiale homogène	147
4.1.4.2	Expansion d'un cylindre creux	151
4.1.4.3	Poutre viscoélastique en flexion	154
4.2	Viscoélasticité incompressible : une formulation mixte en vitesse-pressure	157
4.2.1	Le problème initial	157
4.2.1.1	Hypothèses et premières notations	157
4.2.1.2	Les relations de comportement	158
4.2.2	Formulation variationnelle du problème d'évolution	159
4.2.3	Discrétisation temporelle	161
4.2.4	Un résultat d'existence et d'unicité	162
4.2.5	Discrétisation spatiale	165
4.2.5.1	Problème approché de Galerkin	165
4.2.5.2	Exemples d'éléments finis mixtes bidimensionnels	165
4.2.5.3	Résolution algébrique	167
4.2.6	Exemple de simulation numérique	169

<b>5</b>	<b>Transformations finies de milieux élastoviscoplastiques</b>	<b>173</b>
5.1	Position du problème	173
5.1.1	Le problème initial	173
5.1.2	Discrétisation temporelle : hypothèse et notations préliminaires	175
5.2	Formulations variationnelles en déplacement	176
5.2.1	Approche eulérienne	176
5.2.2	Approche lagrangienne	178
5.3	Formulations variationnelles en vitesse	181
5.3.1	Philosophie	181
5.3.2	Premiers résultats	182
5.3.3	Formulation variationnelle à un champ	184
5.3.3.1	Formulation variationnelle	184
5.3.3.2	Un résultat d'existence et d'unicité	185
5.3.4	Formulation variationnelle à deux champs	189
5.3.4.1	Formulation variationnelle	189
5.3.4.2	Un résultat d'existence et d'unicité	190
5.3.4.3	Discrétisation spatiale	193
5.3.4.4	Résolution algébrique	194
5.3.5	Intégration temporelle	196
5.4	Simulations numériques	197
5.4.1	Transformations linéaires planes	198
5.4.1.1	Expansion homogène	198
5.4.1.2	Élongation uniaxiale	200
5.4.1.3	Distorsion pure	201
5.4.2	Poutre console	204
5.4.2.1	Comportement hypoélastique	204
5.4.2.2	Comportement élastoplastique	206
5.4.3	Cylindre creux en expansion	208
5.4.4	Poinçonnement d'un massif de sol	210
<b>A</b>	<b>Schéma discret de Royis</b>	<b>215</b>
A.1	Introduction	215
A.2	The time-continuous mechanical problem	217
A.2.1	General considerations	217
A.2.2	The constitutive equations	218
A.3	Weak formulation of the time-discretized mechanical problem	220
A.4	Time discretization of the constitutive equations	222
A.4.1	The integral scheme S1	224
A.4.2	The $\theta$ -scheme S2	226
A.4.3	The scheme S3	226
A.4.4	Application to the linear viscoelastic model	230
A.4.5	Application to the unified non-linear viscoelastic model	231
A.5	Numerical computations	235

---

A.5.1	Homogeneous triaxial compression path . . . . .	236
A.5.2	Expanding viscoelastic hollow cylinder . . . . .	241
A.5.3	Bending viscoelastic beam . . . . .	243
A.6	Concluding remarks . . . . .	245
<b>B</b>	<b>Théorèmes de Royis . . . . .</b>	<b>247</b>
B.1	Statement of the problem . . . . .	247
B.2	Notations — Preliminary result . . . . .	248
B.3	Existence and uniqueness results . . . . .	249
B.3.1	First class of problems : $c = 0_{\mathcal{L}(M \times M; \mathbb{R})}$ . . . . .	249
B.3.2	Second class of problems : $c$ is coercive . . . . .	250
B.3.3	Third class of problems : $c$ is non coercive . . . . .	252
B.4	Application to geomechanical boundary value problems . . . . .	254
B.4.1	Statement of the problem . . . . .	254
B.4.2	Weak formulation of the time discretized problem . . . . .	255
B.4.3	Discussion . . . . .	257
B.5	Conclusion . . . . .	260
	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>263</b>
	<b>Index . . . . .</b>	<b>266</b>