

# Table des matières

Table des matières	11
Table des figures	13
Liste des tableaux	16
<b>1 Notions et outils de base pour bien démarrer</b>	<b>17</b>
1.1 Un peu de logique	17
1.1.1 Proposition logique	17
1.1.2 Connecteurs logiques	17
1.1.2.1 Négation logique	18
1.1.2.2 Disjonction logique	18
1.1.2.3 Conjonction logique	18
1.1.2.4 Lois de Morgan	19
1.1.2.5 Implication	20
1.1.2.6 Équivalence	21
1.1.3 Quantificateurs	21
1.1.3.1 Quantificateurs universel et existentiel	21
1.1.3.2 Négation	22
1.1.3.3 Le pseudo-quantificateur d'existence et d'unicité	23
1.1.4 Le raisonnement par l'absurde	23
1.1.5 Le raisonnement par récurrence	24
1.2 Un peu de théorie des ensembles	25
1.2.1 Appartenance et inclusion	25
1.2.2 Intersection	27
1.2.3 Réunion	27
1.2.4 Différence et complémentaire	28
1.2.5 Différence symétrique	28
1.2.6 Relations de Morgan	29
1.2.7 Distributivité	30
1.2.8 Produit cartésien	31
1.2.9 Ensembles finis	31
1.3 Un peu de calcul	36
1.3.1 Le symbole somme	36
1.3.1.1 Définition	36

1.3.1.2	Changement d'indice	37
1.3.1.3	Simplifications télescopiques	37
1.3.1.4	Sommes doubles	38
1.3.2	Le symbole produit	41
1.3.2.1	Définition	41
1.3.2.2	Changement d'indice	42
1.3.2.3	Simplifications télescopiques	42
1.3.2.4	Produits doubles	43
1.3.3	Factorielle, arrangements, combinaisons	46
1.3.3.1	Factorielle	46
1.3.3.2	Arrangements	46
1.3.3.3	Combinaisons	47
1.3.4	Quelques formules à connaître par cœur	49
1.3.4.1	Formule du binôme de Newton et coefficients binomiaux	49
1.3.4.2	Somme des puissances p-ièmes des entiers de 0 à n	52
1.3.4.3	Différence des puissance n-ièmes de deux nombres complexes	56
<b>2</b>	<b>Applications, suites, séries et fonctions réelles</b>	<b>59</b>
2.1	Applications	59
2.1.1	Définitions	59
2.1.2	Injection, surjection, bijection	61
2.1.3	Propriétés des applications images directe et réciproque	66
2.1.4	Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini	68
2.2	Majorant et minorant, borne supérieure et borne inférieure	72
2.2.1	Majorant et minorant	72
2.2.2	Plus grand et plus petit élément	72
2.2.3	Borne supérieure et borne inférieure	73
2.3	Suites et séries réelles	75
2.3.1	Suites réelles	75
2.3.1.1	Définitions	76
2.3.1.2	Suites réelles convergentes	76
2.3.1.3	Suites réelles adjacentes	80
2.3.1.4	Suites extraites d'une suite réelle	82
2.3.1.5	Suites réelles de Cauchy	83
2.3.2	Séries réelles	85
2.3.2.1	Définitions	85
2.3.2.2	Séries réelles convergentes	88
2.3.2.3	Séries réelles à termes positifs	92
2.3.2.4	Séries réelles absolument convergentes	93
2.3.2.5	Produit de Cauchy de séries réelles	97
2.4	Fonctions réelles de variable réelle	101
2.4.1	Définitions	101

2.4.2	Limites d'une fonction réelle	104
2.4.3	Continuité d'une fonction réelle	114
2.4.4	Dérivabilité d'une fonction réelle	125
<b>3</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>149</b>
3.1	Les fonctions exponentielles, logarithmes et puissances	149
3.1.1	La fonction exponentielle	149
3.1.1.1	Une suite de fonctions absolument convergente	149
3.1.1.2	Premières propriétés de la fonction $x \mapsto s(x)$ définie par (3.1)	150
3.1.1.3	Dérivabilité de la fonction $x \mapsto s(x)$ définie par (3.1)	152
3.1.1.4	Une convention et une notation	155
3.1.1.5	Représentation graphique de la fonction exponentielle	158
3.1.2	La fonction logarithme népérien	158
3.1.2.1	Définition — premières propriétés	158
3.1.2.2	Dérivée — variations — limites	159
3.1.2.3	Propriétés algébriques	162
3.1.2.4	Développement en série au voisinage de 1	163
3.1.2.5	Une primitive de la fonction logarithme népérien	164
3.1.3	Les fonctions exponentielles et logarithmes de base $a$	165
3.1.3.1	Les fonctions exponentielles de base $a$	165
3.1.3.2	Les fonctions logarithme de base $a$	169
3.1.4	Les fonctions puissance	171
3.1.4.1	Définition	171
3.1.4.2	Propriétés algébriques	171
3.1.4.3	Dérivée	172
3.1.4.4	Variations — limites	173
3.1.5	La fonction $x$ puissance $x$	174
3.2	Fonctions circulaires et circulaires inverses	176
3.2.1	les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente	176
3.2.1.1	Définitions — premières propriétés	176
3.2.1.2	Formules de trigonométrie circulaire	182
3.2.1.3	Continuité — dérivabilité — variations	191
3.2.1.4	Développements en série des fonctions sinus et cosinus au voisinage de 0	196
3.2.2	Les fonctions arc sinus, arc cosinus, arc tangente et arc cotangente	198
3.2.2.1	Définitions	198
3.2.2.2	Propriétés	200
3.2.2.3	Continuité — dérivabilité — variations	204
3.3	Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses	206
3.3.1	les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente hyperboliques	206
3.3.1.1	Définitions — premières propriétés	206
3.3.1.2	Formules de trigonométrie hyperbolique	209

3.3.1.3	Continuité — dérivabilité — variations . . . . .	217
3.3.1.4	Développements en série des fonctions sinus et cosinus hyperboliques au voisinage de 0 . . . . .	219
3.3.2	Les fonctions arguments sinus, cosinus, tangente et cotangente hyperboliques . . . . .	220
3.3.2.1	Définitions . . . . .	220
3.3.2.2	Propriétés . . . . .	221
3.3.2.3	Continuité — dérivabilité — variations . . . . .	225
<b>4</b>	<b>Le corps <math>\mathbb{C}</math> des nombres complexes . . . . .</b>	<b>229</b>
4.1	Structures de groupe, d'anneau et de corps . . . . .	229
4.1.1	Loi de composition interne . . . . .	229
4.1.2	Structure de groupe . . . . .	231
4.1.3	Structure d'anneau . . . . .	232
4.1.4	Structure de corps . . . . .	233
4.2	Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes . . . . .	234
4.2.1	Construction du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes à partir du corps $\mathbb{R}$ des nombres réels . . . . .	234
4.2.2	Notation algébrique des nombres complexes . . . . .	236
4.2.2.1	Injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ . . . . .	236
4.2.2.2	Le nombre imaginaire $i$ . . . . .	237
4.2.2.3	Notation algébrique des nombres complexes . . . . .	238
4.2.2.4	Partie réelle et partie imaginaire d'un nombre complexe . . . . .	239
4.2.3	Interprétation géométrique des nombres complexes . . . . .	239
4.2.4	Conjugué et module d'un nombre complexe . . . . .	241
4.2.4.1	Conjugaison . . . . .	241
4.2.4.2	Module d'un nombre complexe . . . . .	244
4.2.5	Notation trigonométrique des nombres complexes . . . . .	248
4.2.5.1	Argument d'un nombre complexe non nul . . . . .	248
4.2.5.2	Notation trigonométrique des nombres complexes . . . . .	248
4.2.5.3	Propriétés de l'argument d'un nombre complexe non nul . . . . .	249
4.2.6	Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe . . . . .	253
4.2.6.1	Nombres complexes de module 1 . . . . .	253
4.2.6.2	Formule de Moivre . . . . .	253
4.2.6.3	Racines $n$ -ièmes d'un nombre complexe . . . . .	254
4.2.6.4	Équation du second degré à coefficients complexes . . . . .	255
4.2.6.5	Racines $n$ -ièmes de l'unité . . . . .	257
4.2.7	Notation exponentielle des nombres complexes . . . . .	259
4.2.7.1	Suites complexes . . . . .	259
4.2.7.2	Séries complexes . . . . .	263
4.2.7.3	L'exponentielle complexe . . . . .	264
4.2.7.4	Notation exponentielle des nombres complexes . . . . .	267
4.2.8	Nombres complexes et géométrie plane . . . . .	269

---

4.2.8.1	Interprétation géométrique de $\frac{z-b}{z-a}$ . . . . .	269
4.2.8.2	Produit scalaire et déterminant . . . . .	269
4.2.8.3	Fonctions complexes et transformations planes — similitudes et isométries . . . . .	270
<b>Index</b>	. . . . .	<b>281</b>