

Table des matières

Avant-propos	9
Table des matières	20
Table des figures	23
Liste des tableaux	25
1 Modélisation des phénomènes aléatoires — Espaces probabilisés	29
1.1 Introduction	29
1.2 Expérience aléatoire — Référentiel	30
1.3 Événements — Tribu d'événements	30
1.3.1 Événements — Premières conséquences	30
1.3.2 Logique des événements	31
1.3.3 Tribu d'événements	33
1.4 Probabilité sur un espace probabilisable	36
1.4.1 Définition	36
1.4.2 Propriétés d'une probabilité	37
1.4.3 Probabilité sur un ensemble dénombrable	41
1.4.4 Exemples de probabilités	42
1.5 Dénombrement	44
1.5.1 Permutations	44
1.5.2 Arrangements	46
1.5.3 Combinaisons	48
1.5.4 Dénombrement d'applications dans des ensembles finis	50
1.5.5 Dénombrement des parties d'un ensemble fini	52
1.5.6 Dénombrement d'équations en nombres entiers	54
1.5.7 Arrangements avec répétition	56
1.5.8 Combinaisons avec répétition	58
1.5.9 Application	59
1.6 Modèles d'urne	62
1.6.1 Lois multinomiale et binomiale	63
1.6.2 Lois polyhypergéométrique et géométrique	65

2	Conditionnement et indépendance	69
2.1	Conditionnement	69
2.1.1	Introduction	69
2.1.2	Définition	70
2.1.3	Formule des probabilités composées	71
2.1.4	Théorème des probabilités totales	72
2.1.5	Formule de Bayes	74
2.2	Indépendance	76
2.2.1	Introduction	76
2.2.2	Définition	76
2.2.3	Propriétés	77
3	Variables et vecteurs aléatoires	83
3.1	Introduction	83
3.2	Variables aléatoires	85
3.2.1	Définition	85
3.2.2	Loi d'une variable aléatoire	85
3.2.3	Théorème de transfert	87
3.2.4	Fonction de répartition d'une variable aléatoire	89
3.2.4.1	Définition	89
3.2.4.2	Propriétés	90
3.2.5	Fonction quantile d'une variable aléatoire	91
3.2.5.1	Définition	91
3.2.5.2	Propriétés	92
3.2.6	Les espaces $L^p(\Omega)$	94
3.2.6.1	Espérance d'un variable aléatoire — L'espace $L^1(\Omega)$	95
3.2.6.2	L'espace $L^2(\Omega)$ — Variance d'un variable aléatoire	98
3.2.6.3	Les espaces $L^p(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$	107
3.2.7	Fonction caractéristique d'une variable aléatoire	120
3.2.7.1	Définition	120
3.2.7.2	Propriétés	120
3.2.8	Paramètres caractéristiques d'une variable aléatoire	121
3.2.8.1	Paramètre de position	122
3.2.8.2	Paramètres de dispersion	123
3.2.8.3	Paramètres de forme	124
3.2.8.4	Exemples	125
3.3	Vecteurs aléatoires	132
3.3.1	Définition	132
3.3.2	Loi d'un vecteur aléatoire	134
3.3.3	Théorème de transfert	136
3.3.4	Fonction de répartition d'un vecteur aléatoire	138
3.3.4.1	Définition	138
3.3.4.2	Propriétés	139

3.3.5	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire	143
3.3.5.1	Définition	143
3.3.5.2	Propriétés	144
4	Variables et vecteurs aléatoires discrets	147
4.1	Variables aléatoires discrètes	147
4.1.1	Définition	147
4.1.2	Loi d'une variable aléatoire discrète	148
4.1.3	Théorème de transfert	150
4.1.4	Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète	154
4.1.5	Fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète	156
4.1.6	Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète	157
4.2	Vecteurs aléatoires discrets	159
4.2.1	Définition	160
4.2.2	Loi d'un vecteur aléatoire discret	161
4.2.3	Théorème de transfert	166
4.2.4	Fonction de répartition d'un vecteur aléatoire discret	168
4.2.5	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire discret	170
4.2.6	Fonction génératrice d'un vecteur aléatoire discret	171
4.2.7	Cas d'un couple de variables aléatoires discrètes	173
4.2.7.1	Couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N}	173
4.2.7.2	Couple de variables aléatoires discrètes à ensemble de valeurs fini	175
5	Variables et vecteurs aléatoires absolument continus	179
5.1	Variables aléatoires absolument continues	179
5.1.1	Définition	179
5.1.2	Théorème de transfert	181
5.1.3	Fonction de répartition	185
5.1.4	Fonction caractéristique	186
5.1.5	Méthodes de recherche d'une densité	188
5.2	Vecteurs aléatoires absolument continus	189
5.2.1	Définition	189
5.2.2	Théorème de transfert	191
5.2.3	Fonction de répartition	194
5.2.4	Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire absolument continu	197
5.2.5	Méthodes de recherche d'une densité	199
5.2.6	Cas d'un couple de variables aléatoires absolument continus	204
6	Variables et vecteurs aléatoires indépendants	209
6.1	Indépendance	210
6.1.1	Définition	210
6.1.2	Caractérisation	212

6.1.3	Somme et produit de variables aléatoires indépendantes	217
6.1.4	Exemples	220
6.1.5	Stabilité de lois usuelles par somme indépendante	222
6.2	Lois conditionnelles	224
6.2.1	Premières définitions	225
6.2.2	Théorème de transfert conditionnel	226
6.2.3	Espérance conditionnelle	227
6.2.4	Cas des variables aléatoires discrètes	228
6.2.5	Cas des variables aléatoires absolument continues	230
7	Convergence — Théorèmes limites	233
7.1	Introduction	233
7.2	Convergence	234
7.2.1	Définitions	234
7.2.2	Propriétés	237
7.2.3	Inégalités de Markov, de Bienaymé Tchebychev et de Hoeffding	254
7.2.4	Hiérarchie entre les différents modes de convergence	257
7.3	Lois des grands nombres	261
7.3.1	Loi faible des grands nombres	261
7.3.2	Loi forte des grands nombres	261
7.4	Théorèmes limite	269
7.4.1	Convergence de la loi hypergéométrique vers la loi binomiale	269
7.4.2	Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson	271
7.4.3	Théorème de la limite centrée	272
7.4.3.1	Théorème	272
7.4.3.2	Applications	274
A	Éléments de logique	275
A.1	Proposition logique	275
A.2	Connecteurs logiques	275
A.2.1	Négation	275
A.2.2	Disjonction	276
A.2.3	Disjonction exclusive	276
A.2.4	Conjonction	277
A.2.5	Lois de Morgan	277
A.2.6	Implication	278
A.2.7	Équivalence	279
A.3	Quantificateurs	280
A.3.1	Quantificateurs universel et existentiel	280
A.3.2	Négation	280
A.3.3	Le quantificateur d'existence et d'unicité	281
A.4	Le raisonnement par l'absurde	282
A.5	Le raisonnement par récurrence	282

B	Éléments de théorie des ensembles	285
B.1	Appartenance et inclusion	285
B.2	Intersection	286
B.3	Réunion	287
B.4	Différence et complémentaire	287
B.5	Différence symétrique	288
B.6	Relations de Morgan	289
B.7	Distributivité	290
B.8	Produit cartésien	291
B.9	Relation binaire	291
B.9.1	Relation d'équivalence	292
B.9.2	Relations d'ordre et d'ordre strict	294
B.10	Ensembles finis	295
C	Applications	301
C.1	Définitions	301
C.2	Injection, surjection, bijection	303
C.3	Propriétés des applications images directe et réciproque	308
C.4	Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini	311
D	Quelques formules à connaître par cœur	313
D.1	Formule du binôme de Newton et coefficients binomiaux	313
D.2	Somme des puissances p-ièmes des entiers de 0 à n	317
D.3	Différence des puissance n-ièmes de deux nombres complexes	320
D.4	Les fonction eulériennes	323
D.4.1	La fonction eulérienne de première espèce B	323
D.4.2	La fonction eulérienne de seconde espèce Γ	323
D.5	Formule d'intégration des fonctions sphériques	325
D.5.1	Mesure des boules dans \mathbb{R}^n	325
D.5.2	Mesure des sphères dans \mathbb{R}^n	328
D.5.3	Formule d'intégration des fonctions sphériques	329
E	Lois de probabilité usuelles	331
E.1	Lois discrètes	331
E.1.1	Loi de Dirac δ_{x_0}	331
E.1.2	Loi discrète uniforme $\mathcal{U}(n)$	332
E.1.3	Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	332
E.1.4	Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	333
E.1.5	Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	334
E.1.6	Loi géométrique $\mathcal{G}_0(p)$	335
E.1.7	Loi de Pascal $\mathcal{P}(r, p)$	336
E.1.8	Loi binomiale négative $\mathcal{B}^-(r, p)$	337
E.1.9	Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	338

E.1.10	Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, p, n)$	339
E.2	Lois absolument continues	341
E.2.1	Loi continue uniforme $\mathcal{U}([a, b])$	341
E.2.2	Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	341
E.2.3	Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$	342
E.2.4	Loi lognormale ou loi de Galton $\mathcal{G}(m, \sigma)$	343
E.2.5	Loi de Cauchy $\mathcal{C}(a, b)$	344
E.2.6	Loi χ_n^2 du Khi-deux à n degrés de liberté	345
E.2.7	Loi T_n de Student à n degrés de liberté	346
E.2.8	Loi $F_{m,n}$ de Fisher-Snédecor à m et n degrés de liberté	347
E.2.9	Loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$	347
E.2.10	Loi Beta $B(\alpha, \beta)$	349
F	Tables des lois de probabilité usuelles	351
	Fonction de répartition Φ de la loi normale standard	352
	Fractiles de la loi normale standard	354
	Fractiles de la loi de Student	356
	Fractiles de la loi du khi 2	358
	Fonction de répartition de la loi de Poisson	362
	Bibliographie	365
	Index	368