Somme des cubes des chiffres d'un entier naturel[†]

par Patrick Royis

patrick.royis@patrick-royis.fr

RÉSUMÉ. *On se propose, dans cet article, d'étudier les propriétés de la suite des sommes des cubes des chiffres d'un entier naturel.*

ABSTRACT. Sum of the cubes of the digits of an integer
The goal of this note is to study the properties of the sequence formed by the sums of the cubes of the digits of an integer.

MOTS-CLÉS : *développement décimal.*

Le but de cette note est de présenter la notion de *démonstration par ordinateur* en donnant un exemple où une étude théorique permet de se ramener à un nombre fini de cas, que l'ordinateur pourra examiner à l'aide d'un algorithme approprié.

Théorème 1 (somme des cubes des chiffres d'un entier naturel). — *Soit p un entier naturel non nul et soit*

$$n = \sum_{k=0}^{p-1} a_k 10^k \ \text{ avec } \ a_k \in \{0, \dots, 9\} \ \ \forall k \in \{0, \dots, p-1\} \ \text{ et } \ a_{p-1} \neq 0$$

un entier naturel non nul à p chiffres donné. Posons

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k^3$$

Soit n un entier naturel non nul, et soit $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = n$ et, pour chaque entier naturel m, $u_{m+1} = f(u_m)$. Alors,

[†]2020 Mathematics Subject Classification : 11-01

1. *Si n est un multiple de 3, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à 153 à partir d'un certain rang.*
2. *Si n est congru à 1 modulo 3, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est, à partir d'un certain rang, soit constante et égale à 1 ou à 370, soit cyclique, de cycle appartenant à l'ensemble*

$$\{(55, 250, 133),\ (136, 244),\ (160, 217, 352),\ (919, 1459)\}$$

3. *Si n est congru à 2 modulo 3, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang et égale à 371 ou à 407.*

Démonstration.Soit, pour chaque entier naturel k, u_k le terme de rang k de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, et soit p_k le nombre de chiffres de ce terme. On a alors $u_k \geqslant 10^{p_k-1}$. L'on a par ailleurs $u_{k+1} = f(u_k) \leqslant 9^3 p_k = 729\, p_k$. Or, l'étude de la fonction g définie, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, par $g(x) = 10^{x-1} - 729\, x$ montre que si p_k est supérieur ou égal à 5, l'on a $729\, p_k < 10^{p_k-1}$, et donc $u_{k+1} < u_k$. Ainsi, si l'entier naturel u_0 possède au moins 5 chiffres, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ décroît strictement dans un premier temps, de sorte que pour un certain entier naturel non nul k_0, le terme u_{k_0} de cette suite possède au plus 4 chiffres. Ainsi, il suffit de montrer que le théorème 1 est satisfait par toutes les suites $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles u_0 est un entier naturel non nul et inférieur ou égal à 9999, ce qui peut aisément se faire grâce à un algorithme.
Le principe de cet algorithme est le suivant. Pour chaque entier naturel n non nul et inférieur ou égal à 9999, l'algorithme calcule les termes successifs de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de terme initial $u_0 = n$. Une fois calculé le terme u_{k+1} de rang $k+1$ de cette suite, l'alogorithme parcourt les termes précédents par ordre décroissant de leur rang. S'il rencontre un terme u_i égal à u_{k+1}, on est alors en présence d'un point fixe si $i = k$, et d'un cycle de longueur $k+1-i$ si i est strictement inférieur à k. L'examen de cette suite est alors terminé.
Le code Javascript de cet algorithme ainsi que son exécution sont accessibles par le lien suivant :

https ://www.patrick-royis.fr/

Cette exécution s'avère finie, en ce sens que, pour chaque suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de terme initial un entier naturel non nul et inférieur ou égal à 9999, un point fixe ou un cycle est détecté, ce qui prouve le théorème 1. ***cqfd***