Somme des cubes des chiffres d'un entier naturel

par Patrick Royis
patrick.royis@patrick-royis.fr

6 novembre 2024

Résumé
On se propose, dans cet article, d'étudier une propriété de la suite des sommes des cubes des chiffres d'un entier naturel par itération de la fonction somme des cubes des chiffres.

Mots-clés développement décimal

De la suite des sommes des cubes des chiffres d'un entier naturel

Le but de cette note est de présenter la notion de *démonstration par ordinateur* en donnant un exemple où une étude théorique permet de se ramener un nombre fini de cas, que l'ordinateur pourra examiner à l'aide d'un algorithme approprié. Prouvons pour cela le

Théorème 1 (la pêche miraculeuse) *Soit p un entier naturel non nul et soit*

$$n = \sum_{k=0}^{p-1} a_k 10^k \text{ avec } a_k \in [\![0,9]\!] \ \forall k \in [\![0,p-1]\!] \text{ et } a_{p-1} \neq 0$$

un entier naturel non nul à p chiffres donné. Posons

$$f(n) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k^3$$

Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = n$ et, pour chaque entier naturel m, $u_{m+1} = f(u_m)$. Alors,

1. *Si n est un multiple de 3, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à 153 à partir d'un certain rang.*
2. *Si n est congru à 1 modulo 3, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est, à partir d'un certain rang, soit constante et égale à 1 ou à 370, soit cyclique, de cycle appartenant à l'ensemble*
$$\{(55, 250, 133),\ (136, 244),\ (160, 217, 352),\ (919, 1459)\}$$
3. *Si n est congru à 2 modulo 3, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang et égale à 371 ou à 407.*

Preuve Soit, pour chaque entier naturel k, u_k le terme de rang k de la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$, et soit p_k le nombre de chiffres de ce terme. On a alors $u_k \geq 10^{p_k-1}$. L'on a par ailleurs $u_{k+1} = f(u_k) \leq 9^3 p_k = 729 p_k$. Or, si p_k est supérieur ou égal à 5, l'on a $729p_k < 10^{p_k-1}$, et donc $u_{k+1} < u_k$. Ainsi, si l'entier naturel u_0 possède au moins 5 chiffres, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ décroit strictement dans un premier temps, de sorte que pour un certain entier naturel non nul k_0, le terme u_{k_0} de cette suite possède au plus 4 chiffres. Ainsi, il suffit de montrer que le théorème 1 est satisfait par toutes les suites $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles u_0 est un entier naturel non nul et inférieur à 9999, ce qui peut aisément se faire grâce à un algorithme. Le code Javascript suivant

```
<script>

function Test()
{
var cong, nn, n, mat, mat1, mat2, mat3, niter, finiter, nit, nitmax,
text, text1, text2, text3 ;
text = "" ;
mat1 = [] ;
mat2 = [] ;
mat3 = [] ;
  for (nn=0 ; nn<=9996 ; nn+=3)
  {
    for (cong=1 ; cong<=3 ; cong++)
    {
    mat = [] ;
    n = nn + cong ;
    mat.push(n) ;
    text = text + "Terme initial égal  " + n + " : " ;
    niter = 1 ;
    finiter = 0 ;
      while (finiter == 0)
      {
      niter = niter + 1 ;
      n = scub(n) ;
      mat.push(n) ;
      nit = 0 ;
      nitmax = niter -2
        while((nit <= nitmax) && (finiter == 0))
        {            if (mat[nit] == n)
          {
          finiter = 1
          text = text + n ;
            if (cong == 1)
            {
            mat1.push(n) ;
            }
```

```
            if (cong == 2)
            {
            mat2.push(n) ;
            }
            if (cong == 3)
            {
            mat3.push(n) ;
            }
            if (n == scub(n))
            {
            text = text + " est un point fixe.<br>"
            }
            else
            {
            text = text + " est le début d'un cycle de longueur " +
            (niter-nit-1) + ".<br>"
            }
          }
        nit = nit + 1 ;
        }
      }
    }
  }
mat1 = mattri(matred(mat1)) ;
mat2 = mattri(matred(mat2)) ;
mat3 = mattri(matred(mat3)) ;
text = text + "<br>%%%%%%%%%%%%%%%%%%%" ;
text = text + "<br>%%%%% R&#233capitulatif %%%%" ;
text = text + "<br>%%%%%%%%%%%%%%%%%%%<br>" ;
text = text + "<br> Nombres congrus  1 modulo 3 :<br>" + cycle(mat1) ;
text = text + "Nombres congrus  2 modulo 3 :<br>" + cycle(mat2) ;
text = text + "Nombres multiples de 3 :<br>" + cycle(mat3) ;
document.getElementById("result").innerHTML = text ;
}

function scub(n)
{var cub ;
cub = 0 ;
  while (n > 0)
  {
  u = n % 10 ;
  cub = cub + u*u*u ;
  n = Math.floor(n/10) ;
  }
return cub ;
}
```

```
 function matred(mat)
{var long, matr, i, mi, j, ifin;
long = mat.length - 1;
matr =[];
matr.push(mat[0])
  for (i=1; i<=long; i++)
  {
  mi = mat[i];
  j = 0;
  ifin = 1;
    while ((j <= i-1) && (ifin == 1))
    {
      if (mat[j] == mi)
      {
      ifin = 0;
      }
    j = j + 1;
    }
    if (ifin == 1)
    {
    matr.push(mi);
    }
  }
return matr;
}

function mattri(mat)
{
var long, matt, i, mi, j, mj;
long = mat.length - 1;
matt = mat;
  for (i=0; i<=long-1; i++)
  {
    for (j=i+1; j<=long; j++)
    {
    mi = matt[i];
    mj = matt[j];
      if (mj < mi)
      {
      matt[i] = mj;
      matt[j] = mi
      }
    }
  }
return matt;
}
```

```
 function cycle(mat)
{var text, ltext, long, i, mi, nn, nit ;
long = mat.length - 1 ;
text = "" ;
  for (i=0 ; i<=long ; i++)
  {
  mi = mat[i] ;
  text = text + "{" + mi + ", " ;
  nn = scub(mi)
  nit = 1 ;
    while (nn != mi)
    {
    text = text + nn + ", " ;
    nn = scub(nn) ;
    nit = nit + 1 ;
    }
  ltext=text.length ;
    if (nit == 1)
    {
    text = text.substr(0,ltext-2) + "} est un point fixe.<br>" ;
    }
    else
    {
    text = text.substr(0,ltext-2) + "} est un cycle de longueur " +
nit +
    ".<br>" ;
    }
  }
text = text + "<br>" ;
return text ;
}
</script>
```

montre que le théorème 1 est satisfait par toutes les suites $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telles que u_0 est un entier naturel non nul et inférieur à 9999, ce qui achève sa preuve. $\square$