

Table des matières

Table des matières	11
Table des figures	13
Liste des tableaux	15
1 Algèbre générale	17
1.1 Relation binaire	17
1.1.1 Relation d'équivalence	18
1.1.2 Relations d'ordre et d'ordre strict	20
1.2 Lois de composition sur un ensemble	21
1.2.1 Loi de composition interne	21
1.2.2 Loi de composition externe	23
1.3 Arithmétique des entiers	24
1.3.1 Division euclidienne	24
1.3.2 Congruences	25
1.3.3 PGCD et PPCM de deux entiers relatifs	28
1.3.3.1 PGCD de deux entiers relatifs non nuls	28
1.3.3.2 PPCM de deux entiers relatifs non nuls	35
1.3.4 Nombres premiers	36
1.3.4.1 Entiers relatifs premiers	36
1.3.4.2 Décomposition en produit de facteurs premiers	38
1.3.4.3 Diviseurs d'un entier naturel	39
1.3.4.4 Fonction indicatrice d'Euler	42
1.4 Groupes	43
1.4.1 Structure de groupe	43
1.4.2 Sous-groupes	46
1.4.3 Morphisme de groupes	51
1.4.4 Produit de groupes	57
1.4.5 Le groupe additif $(\mathbb{Z}, +)$ des entiers relatifs	62
1.4.6 Ordre des éléments d'un groupe	65
1.4.7 Groupes finis	66
1.4.8 Groupes cycliques	67
1.4.9 Groupe des permutations d'un ensemble fini	69
1.5 Anneaux et corps	75

1.5.1	Structures d'anneau et de corps	75
1.5.2	Sous-anneaux et idéaux	77
1.5.3	Morphismes d'anneaux	80
1.5.4	Produit d'anneaux	85
1.5.5	L'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$ des entiers relatifs	86
1.5.6	Compléments d'arithmétique des entiers	88
2	Algèbre linéaire	93
2.1	Espaces vectoriels — Généralités	93
2.1.1	Structure d'espace vectoriel	93
2.1.1.1	Définition	93
2.1.1.2	Exemple fondamental	95
2.1.1.3	Espace vectoriel normé	96
2.1.2	Sous-espaces vectoriels	98
2.1.3	Produit d'espaces vectoriels	103
2.1.4	Somme de sous-espaces vectoriels	104
2.1.5	Applications linéaires	110
2.1.6	Les espaces vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$, le groupe $\text{GL}(E)$	115
2.1.7	Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme	120
2.1.8	Projecteurs et involutions linéaires d'un \mathbb{K} -espace vectoriel	121
2.1.8.1	Projecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel	121
2.1.8.2	Involutions linéaires d'un \mathbb{K} -espace vectoriel	125
2.1.9	Formes linéaires et p -linéaires — Hyperplans	128
2.1.9.1	Formes linéaires	128
2.1.9.2	Formes p -linéaires	130
2.1.9.3	Hyperplans	133
2.1.10	Familles libres, familles génératrices, bases	134
2.1.11	Espaces préhilbertiens réels	143
2.2	Espaces vectoriels de dimension finie	149
2.2.1	Définition — Premières propriétés	149
2.2.2	Produit d'espaces vectoriels	152
2.2.3	Sous-espaces vectoriels	154
2.2.3.1	Sous-espaces vectoriels supplémentaires	154
2.2.3.2	Somme de sous-espaces vectoriels	155
2.2.3.3	Sous-espace vectoriel quotient	156
2.2.4	Applications linéaires	156
2.2.4.1	Rang d'une application linéaire	158
2.2.4.2	Rang d'une famille de vecteurs	160
2.2.5	Dualité en dimension finie	160
2.2.5.1	Formes linéaires	160
2.2.5.2	Formes p -linéaires	162
2.2.5.3	Déterminant	167
2.2.6	Espaces euclidiens	172

2.2.6.1	Définition	172
2.2.6.2	Bases orthonormées	172
2.2.6.3	Dual d'un espace euclidien	175
2.2.6.4	Adjoint d'un endomorphisme	178
3	Matrices et applications linéaires	187
3.1	Matrices sur le corps \mathbb{K}	187
3.1.1	Définitions	187
3.1.2	Opérations sur les matrices	189
3.1.2.1	Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	189
3.1.2.2	Produit matriciel	190
3.1.2.3	Transposition des matrices	192
3.1.3	Matrices carrées : premiers résultats	194
3.1.3.1	L'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	194
3.1.3.2	Le groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{K})$	195
3.1.3.3	Matrices carrées particulières	195
3.1.3.4	Trace d'une matrice carrée	199
3.1.3.5	Déterminant d'une matrice carrée : définition et premières propriétés	200
3.1.3.6	Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée	205
3.2	Matrices d'applications linéaires, d'endomorphismes et de formes bilinéaires	207
3.2.1	Matrices d'applications linéaires	207
3.2.1.1	Définition, premières propriétés	207
3.2.1.2	Matrice de la composée de deux applications linéaires	209
3.2.1.3	Matrice de la transposée d'une application linéaire	210
3.2.1.4	Rang d'une matrice	212
3.2.1.5	Changements de base	212
3.2.2	Matrices d'endomorphismes	215
3.2.2.1	Isomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	215
3.2.2.2	Matrice de la transposée d'un endomorphisme	216
3.2.2.3	Changements de base	217
3.2.2.4	Déterminant d'une matrice d'endomorphisme	218
3.2.2.5	Polynôme caractéristique d'une matrice d'endomorphisme	221
3.2.3	Matrices de formes bilinéaires	222
3.2.3.1	Définition	222
3.2.3.2	Changements de base	224
3.2.3.3	Cas des espaces euclidiens	224
3.3	Exponentielle de matrices carrées réelles	228
3.3.1	L'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	228
3.3.2	Exponentielle d'une matrice carrée réelle	229
3.3.3	Étude de la fonction de variable réelle $t \mapsto e^{tA}$	233

4	Calcul différentiel	235
4.1	Notions de base de topologie dans \mathbb{R}^n	235
4.1.1	Ouverts et fermés	235
4.1.2	Intérieur et extérieur, frontière	237
4.1.3	Adhérence, point adhérent	238
4.2	Fonctions réelles de plusieurs variables réelles	240
4.2.1	Définitions	240
4.2.2	Limite, continuité	241
4.2.3	Dérivées partielles	244
4.2.4	Extrema d'une fonction de plusieurs variables	252
4.3	Fonctions vectorielles de plusieurs variables réelles	254
4.3.1	Définition	254
4.3.2	Continuité	255
4.3.3	Différentiabilité	255
4.3.4	Cas de l'espace euclidien \mathbb{R}^3	257
4.4	Équations différentielles	259
4.4.1	Équations différentielles linéaires du premier ordre	259
4.4.1.1	Résolution de l'équation homogène	259
4.4.1.2	Résolution de l'équation avec second membre	260
4.4.1.3	Recherche de solutions particulières	261
4.4.1.4	Équations non résolues	264
4.4.2	Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants	265
4.4.2.1	Résolution du système homogène	266
4.4.2.2	Résolution du système avec second membre	267
4.4.2.3	Recherche de solutions particulières : méthode de variation de la constante	268
4.4.3	Équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants	269
4.4.3.1	Résolution de l'équation homogène	270
4.4.3.2	Résolution de l'équation avec second membre	275
4.4.3.3	Recherche de solutions particulières	276
4.4.4	Équations d'Euler	280
5	Calcul intégral	283
5.1	L'intégrale de Riemann	283
5.1.1	Construction de l'intégrale de Riemann	283
5.1.1.1	Subdivision d'un intervalle	283
5.1.1.2	Fonction en escalier	283
5.1.1.3	Fonction continue par morceaux	284
5.1.1.4	Sommes de Darboux	285
5.1.1.5	Construction de l'intégrale	286
5.1.1.6	Exemples de fonctions Riemann-intégrables	291
5.1.2	Propriétés de l'intégrale de Riemann	295

5.1.2.1	Linéarité	295
5.1.2.2	Positivité et croissance	296
5.1.2.3	Produit	298
5.1.3	Théorème fondamental du calcul intégral	299
5.1.3.1	Relation de Chasles	299
5.1.3.2	Théorème fondamental du calcul intégral	303
5.1.4	Intégration par parties et changement de variable	304
5.1.4.1	Intégration par parties	304
5.1.4.2	Changement de variables	304
5.1.5	Sommes de Riemann	307
5.1.6	Formules de la moyenne	308
5.2	Intégrales généralisées	314
5.2.1	Introduction	314
5.2.2	Généralisation de l'intégrale de Riemann	314
5.2.3	Exemples fondamentaux	317
5.2.4	Cas des fonctions réelles positives	319
5.2.5	Cas des fonctions réelles non positives	325
5.2.5.1	Intégrales absolument convergentes	325
5.2.5.2	Intégrales semi-convergentes	327
5.3	Primitives des fonctions usuelles	328
5.3.1	Fonctions logarithmiques, exponentielles et puissances	328
5.3.2	Fonctions circulaires	328
5.3.3	Fonctions hyperboliques	329
5.3.4	Fractions rationnelles	329
5.4	Intégrales multiples	332
5.4.1	Intégrales doubles	332
5.4.2	Intégrales multiples	337
	Index	343